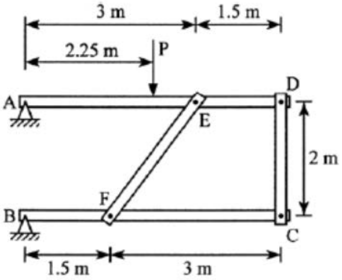
《工程力學(包括材料力學)》

一、圖一中之構造承受一強度為P的集中載重，其中A與B支承點為鉸接(hinge)，其他接點均為栓接(pin)。若A點與B點支承處之水平與垂直反力中任一分量皆不得大於2250N，試計算最大容許載重P之值。(25分)



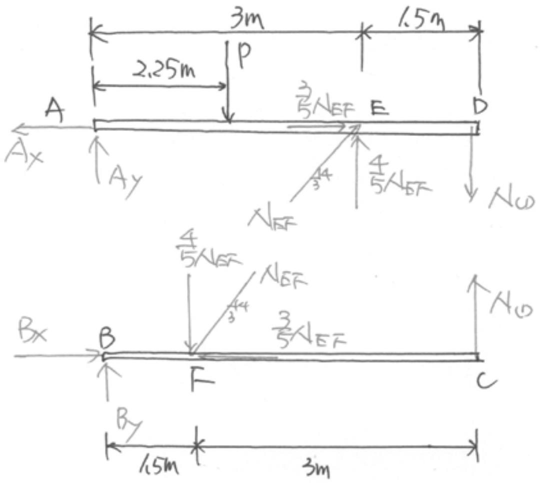
圖一

試題評析	二力桿+三力桿平衡問題，屬於基本題型。
考點命中	《高點建國土木突破靜力學》教材第2-106頁。

解：

(1) EF桿及CD桿為二力桿件：

假設EF桿內力為 N_{EF}(壓), CD桿內力為 N_{CD}(拉)



取AED桿分析:

$\Sigma M_A=0$

∴ $\frac{4}{5}N_{EF}(3) - N_{CD}(4.5) - P(2.25) = 0$ —(1)

取BFC桿分析：

$\Sigma M_B=0$ ↺+

∴ $\frac{4}{5}N_{EF}(1.5)-N_{CD}(4.5)=0$ —(2)

∴ 由(1)(2)式得：

$N_{EF}=1.875P$

$N_{CD}=0.5P$

(2)

取AED桿分析：

∴ $A_x=\frac{3}{5}\times 1.875P=1.125P\ (\leftarrow)$

∴ $A_y=\frac{4}{5}\times 1.875P-0.5P-P=0$

取BFC桿分析：

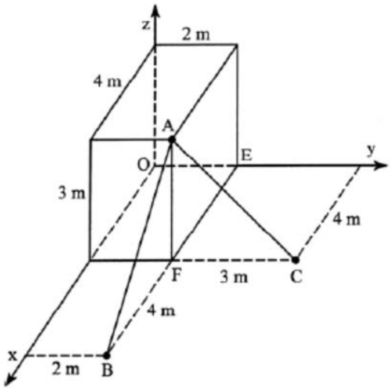
∴ $B_x=\frac{3}{5}\times 1.875P=1.125P\ (\rightarrow)$

∴ $B_y=\frac{4}{5}\times 1.875P-0.5P=P\ (\uparrow)$

∴ 令 $1.125P\le 2250\ (N)$

∴ $P\le 2000\ (N)$

二、圖二中之4m×2m×3m矩形體受二條繩索AB與AC之張力作用，若已知此二條繩索對O點之力矩大小為2000kN-m，且繩索AB與AC之張力大小比例為$1:\sqrt{2}$，試計算此二條繩索之張力大小。(25分)



圖二

試題評析	求一力對一點之力矩問題，屬於基本題型。
考點命中	《高點建國土木突破靜力學》教材第1-23頁。

解：

解：(1). $O(0,0,0)$

$A(4,2,3)$

$B(8,2,0)$

$C(4,5,0)$

$\therefore \vec{r}_{A/O} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ (m)

$\therefore \vec{T}_{AB} = T_{AB}\left(\dfrac{4\vec{i} - 3\vec{k}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right) = \dfrac{4}{5}T_{AB}\vec{i} - \dfrac{3}{5}T_{AB}\vec{k}$

$\vec{T}_{AC} = T_{AC}\left(\dfrac{3\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{3^2+(-3)^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}T_{AC}\vec{j} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}T_{AC}\vec{k}$

又∵ $T_{AC} = \sqrt{2}\,T_{AB}$

$\therefore \vec{T}_{AC} = T_{AB}\vec{j} - T_{AB}\vec{k}$

(2).

$\vec{r}_{A/O} \times \vec{T}_{AB} + \vec{r}_{A/O} \times \vec{T}_{AC}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 3 \\ \frac{4}{5}T_{AB} & 0 & -\frac{3}{5}T_{AB} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & T_{AB} & -T_{AB} \end{vmatrix}$$

$$= (-6.2T_{AB})\vec{i} + (8.8T_{AB})\vec{j} + (2.4T_{AB})\vec{k}$$

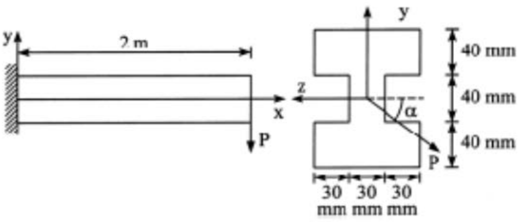
又∵ $\Sigma M_0 = 200$ kN-m

$\therefore (-6.2T_{AB})^2 + (8.8T_{AB})^2 + (2.4T_{AB})^2 = 2000^2$

$\therefore T_{AB} = 181.34$ (kN)(拉)

$T_{AC} = 256.45$ (kN)(拉)

三、有一I型斷面之懸臂梁於自由端受一傾斜之集中載重P如圖三所示，若P=600N且 $\alpha = 30°$。請計算此梁斷面之慣性矩 I_y、I_z，中性軸與z軸之夾角 β，及最大之張應力 σ_x 值？(25分)



圖三

試題評析	計算斷面慣性矩是送分題，千萬不能錯！斷面最大撓曲張應力及中性軸位置，上課皆有詳細說明，本題要拿滿分並不困難。
考點命中	《高點建國土木材料力學》講義第一回，例題4.13(P4-21)。

解：

(1)計算 I 型斷面慣性矩I_y及I_z

$$y\text{ 軸慣性矩}I_y=\frac{1}{12}[(80)(90^3)+(40)(30^3)]=\underline{4.95\times10^6\ mm^4}$$

$$z\text{ 軸慣性矩}I_z=\frac{1}{12}[(90)(120^3)-(60)(40^3)]=\underline{12.64\times10^6\ mm^4}$$

(2)I 型斷面承受之最大張應力σ_x

將自由端傾斜力 P 力(與 z 軸夾 30 度)拆解成沿斷面主軸 z 軸及 y 軸方向力量：

$P_z=P\cos30°=600\cos30°=519.615\ N$

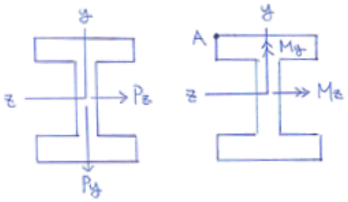
$P_y=P\sin30°=600\sin30°=300\ N$

計算P_z及P_y對固定端引致之彎矩，特別注意

P_y會產生M_z、P_z會產生M_y喔！

$M_z=P_yL=300(2)=600\ N\text{-}m$

$M_y=P_zL=519.615(2)=1039.23\ N\text{-}m$



M_z及M_y彎矩即是**作用於主軸上**的彎矩。在 I 型斷面「**A**」**點會產生最大張應力**(見圖)，其σ_x值為：

$$\sigma_x=\frac{M_z}{I_z}y_A+\frac{M_y}{I_y}z_A=(\frac{600\times10^3}{12.64\times10^6})(60)+(\frac{1039.23\times10^3}{4.95\times10^6})(45)=\underline{12.296\ MPa}$$

(3)中性軸與 z 軸夾角β值

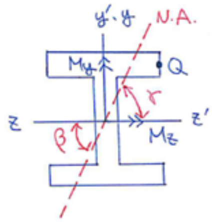
給予 I 型斷面另一個座標系統y'z'，此時在M_z及M_y作用下於y'z'座標第一象限任取一點 Q，其應力值σ_Q：

$$\sigma_Q=\frac{M_z}{I_z}y'-\frac{M_y}{I_y}z'$$

接著令$\sigma_Q=0$可得到中性軸位置

$$\Rightarrow\sigma_Q=\frac{M_z}{I_z}y'-\frac{M_y}{I_y}z'=0\Rightarrow\frac{M_z}{I_z}y'=\frac{M_y}{I_y}z'$$

$$\Rightarrow\text{令 }\tan\gamma=\frac{y'}{z'}=\frac{M_yI_z}{M_zI_y}=4.423\Rightarrow\gamma=\tan^{-1}(4.423)=77.26°$$

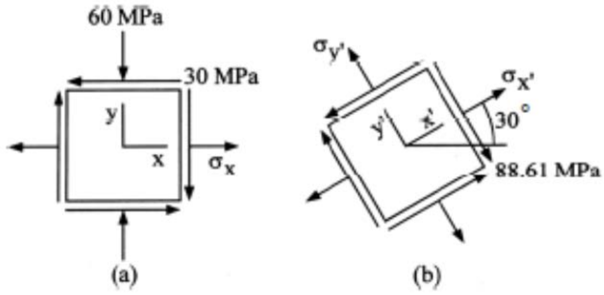


但題目問的是中性軸與 z 軸間之夾角β，依角度關係可得

$\beta=\gamma=\underline{77.26°(\circlearrowleft)}$

所以**中性軸與 z 軸夾角β值為從 z 軸起算，逆時針旋轉77.26°**。

四、有一平面應力元素受應力如圖四(a)所示，當此元素逆時鐘方向旋轉$30°$後，其應力狀況如圖四(b)所示。請計算σ_x、$\sigma_{x'}$、$\sigma_{y'}$及此元素之主軸應力(principal stresses)與主軸應力方向，並將主軸應力標示於旋轉至主軸應力方向之應力元素上。（25分）



圖四

試題評析	簡單的應力轉換公式應用題，配合應力莫爾圓可輕鬆回答所有問題；最後要能正確畫出主應力元素圖！
考點命中	《高點建國土木材料力學》講義第二回，例題6.2(P6-6)；練習6.1(P6-33)

解：

1.寫出正向應力σ_x、σ_y及剪應力τ_{xy}值

採用**拉逆為正**符號系統，此時σ_x待求、$\sigma_y = -60$ MPa、$\tau_{xy} = -30$ MPa。

2.代入平面應力轉換公式

由**平面應力轉換公式**求**逆時針旋轉 30°**後所對應的應力分量

$$\tau_\theta = -(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \tau_{30°} = -\frac{\sigma_x - (-60)}{2}\sin(2\times 30°) + (-30)\cos(2\times 30°) = -88.61$$

小心$\tau_{30°}$是-88.61而不是 88.61！由上式可解$\underline{\sigma_x = 110\text{ MPa}}$。

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'} = \sigma_{30°} = \frac{110+(-60)}{2} + \frac{110-(-60)}{2}\cos(2\times 30°) + (-30)\sin(2\times 30°)$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma_{x'} = 41.519\text{ MPa}}$$

由**正向應力代數和不變**特性，可求出$\sigma_{y'}$之值

$$\sigma_{x'}+\sigma_{y'} = \sigma_x+\sigma_y \Rightarrow \sigma_{y'} = \sigma_x+\sigma_y-\sigma_{x'} = 110-60-41.519 = \underline{8.481\text{ MPa}}$$

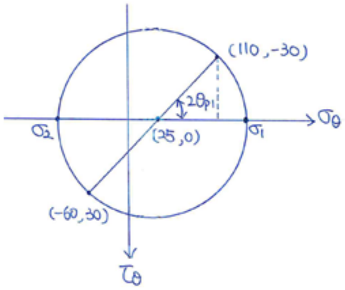
3.繪出應力莫爾圓

(1)將$(\sigma_x,\tau_{xy}) = (110,-30)$及$(\sigma_y,-\tau_{xy}) = (-60,30)$標示於莫爾圓上。

(2)莫爾圓圓心及半徑計算如下

圓心$(\sigma_{avg},0)=(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}，0)=(\frac{110-60}{2}，0)=(25，0)$

半徑 $R=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2}=\sqrt{(\frac{110+60}{2})^2+(-30)^2}=90.139$



4.計算主應力值並判斷其方向

由應力莫爾圓可知最大主應力$\boldsymbol{\sigma_1}$ = **圓心+半徑**，最小主應力$\boldsymbol{\sigma_2}$ = **圓心－半徑**

最大主應力σ_1 = 圓心+半徑 $=25+90.139=$ 115.139 MPa (拉應力)

最小主應力σ_2 = 圓心-半徑 $=25-90.139=$ −65.139 MPa (壓應力)

由應力莫爾圓可得$(\sigma_x,\tau_{xy})=(110,-30)$與$\sigma_1$間夾角$2\theta_{P1}$之幾何關係

$\tan 2\theta_{P1}=\frac{-30}{110-25}\Rightarrow\theta_{P1}=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{-30}{85})=-9.72°(\circlearrowright)$

這代表從 **x 軸順時針旋轉9.72°會得到最大主應力$\boldsymbol{\sigma_1}$ = 115.139 MPa**；由於兩主軸在平面座標相差90°，因此將θ_{P1}加上90°後可得θ_{P2}(亦可用減去90°計算)，故$\theta_{P2}=\theta_{P1}+90°=80.28°(\circlearrowleft)$，**代表從 x 軸逆時針旋轉80.28°會得到最小主應力$\boldsymbol{\sigma_2}$ = −65.139 MPa**。

5.繪出主應力元素圖

主應力元素圖可繪出如下：