

《抽樣方法》

試題評析	今年難易度屬於中等，除了第四大題(二)以往沒有考過外，其他題目都是必讀題型，且上課時都有講過。此考卷平均分數在60分，程度較好的考生可以有80以上。
考點命中	一、《高點·高上抽樣方法講義》，趙治勳編撰，第二章。 二、《高點·高上抽樣方法講義》，趙治勳編撰，第十一章與第十四章。 三、《高點·高上抽樣方法講義》，趙治勳編撰，第九章。 四、《高點·高上抽樣方法講義》，趙治勳編撰，第五章。

- 一、市政府為了解市民對於在市內開設新的公立托兒所的看法，以簡單隨機抽樣法抽出500位市民進行調查。根據調查結果得知：有260位反對在市內設立新的公立托兒所，有230位贊成在市內設立新的公立托兒所，其餘沒意見。根據調查結果，市政府宣稱超過半數的市民反對在市內開設新的公立托兒所。
- (一)試估計市民反對在市內設立新的公立托兒所的比例；且在95%的信賴水準下，估計此次調查的誤差界限及說明是否同意市政府的宣稱。(15分)
- (二)在95%的信賴水準下，說明反對在市內設立新的公立托兒所的比例是否顯著高於贊成在市內設立新的公立托兒所的比例？(10分)

答：

$$(一) p = \frac{a}{n} = \frac{260}{490} = 0.5306 = 53.06\%$$

$$s_p = \sqrt{(1-f) \frac{\frac{n}{n-1} pq}{n}} \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \sqrt{\frac{\frac{n}{n-1} pq}{n}} = \sqrt{\frac{490}{490-1} (0.5306)(0.4694)} = 0.02257$$

$$B = 1.96s_p = 0.04424$$

$$H_0: P \leq 0.5 \quad \text{vs} \quad H_1: P > 0.5$$

$$\therefore (p - z_\alpha s_p, 1) = (0.5306 - 1.645 \times 0.02257, 1) = (0.4935, 1) \text{ 有包含 } 0.5$$

$$\therefore \text{don't reject } H_0$$

我們沒有足夠證據去推論市政府宣稱（反對比例超過半數）正確。

(二)令 X_1, X_2 分別表反對與贊成之人數， $(X_1, X_2) \sim$ 三項($n = 500, P_1, P_2$)

$$H_0: P_1 \leq P_2 \quad \text{vs} \quad H_1: P_1 > P_2$$

$$\therefore ((p_1 - p_2) - z_\alpha \sqrt{\frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + 2 p_1 p_2}{n}}, 1)$$

$$= \left(\left(\frac{260}{500} - \frac{230}{500} \right) - 1.645 \sqrt{\frac{\frac{260}{500} \frac{240}{500} + \frac{230}{500} \frac{270}{500} + 2 \frac{260}{500} \frac{230}{500}}{500}}, 1 \right)$$

$$= (-0.01269, 1) \text{ 有包含 } 0$$

$$\therefore \text{don't reject } H_0$$

我們沒有足夠證據去推論反對比例高於贊成比例。

【版權所有，重製必究！】

二、大方文創商品公司共有50家分店，去年第1季的營業額為3,950萬元，為了解今年第1季的營運狀況，自50家分店中抽出6家分店調查，得各分店去年第1季的營業額 (x_i) 及今年第1季的營業額 (y_i) 如下：(單位：萬元)

分店	1	2	3	4	5	6
x_i	41	83	101	80	85	70
y_i	63	121	97	110	83	101

- (一) 試估計大方文創商品公司今年的營業成長率。利用比率估計式 (ratio estimator) 估計公司今年第1季的營業額，並求算其標準誤。(10分)
- (二) 試利用迴歸估計式 (regression estimator) 估計公司今年第1季的營業額，並求算其標準誤。(10分)
- (三) 試說明並評估那種估計式較佳。(5分)

答：

$$\sum x_i = 460, \sum x_i^2 = 37296, \sum y_i = 575, \sum y_i^2 = 57209, \sum x_i y_i = 45348$$

$$ss_x = 2029.3333, ss_y = 2104.8333, ss_{xy} = 1264.6667$$

(一)

分店	1	2	3	4	5	6
x_i	41	83	101	80	85	70
y_i	63	121	97	110	83	101
成長率%	53.6585	45.7831	-3.9604	37.5	-2.3529	44.2857

$$p = \sqrt[6]{(1+53.6585\%)(1+45.7831\%)(1-3.9604\%)(1+37.5\%)(1-2.3529\%)(1+44.2857\%)} - 1$$

$$= 60.9286\% \quad \text{估計今年營業成長率}$$

$$r = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{95.8333}{76.6667} = 1.25$$

$$s_r = \frac{1}{\bar{X}} \sqrt{(1-f) \frac{s_d^2}{n}} = \frac{1}{3950} \sqrt{(1-\frac{6}{50}) \frac{422.8}{6}} = 0.09968$$

$$\text{其中 } s_d^2 = \frac{ss_y}{n-1} + r^2 \frac{ss_x}{n-1} - 2r \frac{ss_{xy}}{n-1} = 422.8$$

$$\hat{Y}_r = rX = 1.25 \times 3950 = 4937.5$$

$$s_{\hat{Y}_r} = Xs_r = 3950 \times 0.09968 = 393.736$$

$$(二) \hat{Y}_{lr} = N\bar{y}_{lr} = N[\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})] = 50[95.8335 + 0.6232(\frac{3950}{50} - 76.6667)] = 4864.3806$$

$$\text{其中 } b_1 = \frac{ss_{xy}}{ss_x} = \frac{1264.6667}{2029.3333} = 0.6232$$

$$s_{\hat{Y}_{lr}} = Ns_{\bar{y}_{lr}} = N \sqrt{(1-f) \frac{s_e^2}{n}} = 50 \sqrt{(1-\frac{6}{50}) \frac{329.1711}{6}} = 347.4134$$

$$\text{其中 } s_e^2 = MSE = \frac{ss_y - b_1^2 ss_x}{n-2} = 329.1711$$

(三)由於 $v(\hat{Y}_r) > v(\hat{Y}_{lr})$ ，故迴歸估計式較佳。

三、甲工廠共有15部機器專門生產A產品，每部機器每天生產A產品的數量分別如下：120、90、270、300、450、150、180、100、310、260、220、190、160、250、140。品管部經理想要了解工廠每天生產出多少不良的A產品，欲自15部機器中抽出3部機器，再進行全面檢查。由於每部機器生產不良品的數量與每部機器的產能有高度的相關。因此，品管人員依照各機器的產能，採用依大小成比例的機率抽樣法（sampling with probabilities proportional to size, PPS）抽樣。

(一)請在使用亂數表隨機取得的數字為2981、0607及2215的情況下，詳細說明如何運用PPS抽樣法抽出3部機器為集群樣本。（10分）

(二)若抽出的機器分別為第6、7及11部，全面檢查後得知，其中不良品的個數分別如下：6、9及18。請估計工廠每天產出不良A產品的總數，並求其變異數。（8分）

(三)如(二)所述，請估計工廠每天產出不良A產品的比例，並求其95%的誤差界限。（7分）

答：

(一)

機器號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數量	120	90	270	300	450	150	180	100	310
累積數量	120	210	480	780	1230	1380	1560	1660	1970

機器號	10	11	12	13	14	15
數量	260	220	190	160	250	140
累積數量	2230	2450	2640	2800	3050	3190

因此

亂數	2981	0607	2215
機器號	14	4	10

(二)

機器號	6	7	11
數量	1380	1560	2450
不良品數	6	9	18

$$\hat{A}_{pps} = Mp_{pps} = \frac{M}{n} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{3190}{3} \left(\frac{6}{1380} + \frac{9}{1560} + \frac{18}{2450} \right) = 18.57 \text{ (個)}$$

$$v(\hat{A}_{pps}) = M \frac{s_p^2}{n} = 3190^2 \times \frac{0.000002251}{3} = 7.6355$$

(三)

$$p_{pps} = \frac{\hat{A}_{pps}}{M} = \frac{18.57}{3190} = 0.005821$$

$$s_{p_{pps}} = \sqrt{\frac{s_p^2}{n}} = \sqrt{\frac{0.000002251}{3}} = 0.0008662$$

$$B = 1.96s_{p_{pps}} = 0.001698$$

【版權所有，重製必究！】

四、某休閒度假村有3處住宿區，分別是靠海岸的海景小屋、沿山坡的豪華小木屋及溫馨舒適大樓的精緻客房。其中海景小屋80間，豪華小木屋60間，以及精緻客房260間。現度假村經理想了解住宿客人對度假村提供的服務是否滿意，擬進行一項調查計畫。由於3處住宿區的位置及房價均有所差異，決定分區進行調查，調查費用因住宿區房間的距離不同而不同，豪華小木屋分布範圍最大，所以調查費用最高。已知每間海景小木屋的調查費用為64元，每間豪華小木屋的調查費用為100元，而每間精緻客房的調查費用為36元。根據去年調查的結果得知，豪華小木屋區有60%的客人表示滿意，精緻客房區有80%的客人表示滿意，海景小屋今年才開始提供住宿服務，所以沒有資料可參考。

(一)若希望估計住宿客人滿意比例的信賴度為95%且誤差界限為0.05，則須調查多少間海景小屋、豪華小木屋及精緻客房？此時調查總費用為何？(15分)

(二)若調查總費用的預算為5,000元，則調查多少間海景小屋、豪華小木屋及精緻客房才能使住宿客人滿意比例之估計式的變異數最小。(10分)

答：
(一)

h	N_h	P_h	$S_h^2 = \frac{N_h}{N_h - 1} P_h Q_h$	c_h
1(海景)	80	以0.5代	0.2532	64
2(豪華)	60	0.6	0.2441	100
3(精緻)	260	0.8	0.1606	36

$$\text{可得 } \sum_{h=1}^L \sqrt{c_h} N_h S_h = 1243.6493, \quad \sum_{h=1}^L \frac{N_h S_h}{\sqrt{c_h}} = 25.3621, \quad \sum_{h=1}^L N_h S_h^2 = 76.658,$$

$$V = \left(\frac{B}{z_{\frac{\alpha}{2}}} \right)^2 = \left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2 = 0.0006508$$

$$n = \frac{\left(\sum_{h=1}^L \sqrt{c_h} N_h S_h \right) \left(\sum_{h=1}^L \frac{N_h S_h}{\sqrt{c_h}} \right)}{VN^2 + \sum_{h=1}^L N_h S_h^2} = \frac{(1243.6493)(25.3621)}{(0.0006508)(400)^2 + (76.658)} = 307.153 \text{ 取 } 308$$

$$n_h = \frac{\frac{N_h S_h}{\sqrt{c_h}}}{\sum_{h=1}^L \frac{N_h S_h}{\sqrt{c_h}}} \times n \quad n_1 = \frac{\frac{80 \times \sqrt{0.2532}}{\sqrt{64}}}{25.3621} \times 308 = 61.1079 \text{ 取 } 61$$

$$n_2 = \frac{\frac{60 \times \sqrt{0.2441}}{\sqrt{100}}}{25.3621} \times 308 = 35.9998 \text{ 取 } 36$$

$$n_3 = n - n_1 - n_2 = 211$$

【版權所有，重製必究！】

(二) 假設不考慮固定成本

$$n = \frac{C \sum_{h=1}^L \frac{N_h S_h}{\sqrt{c_h}}}{\sum_{h=1}^L \sqrt{c_h} N_h S_h} = \frac{5000 \times 25.3621}{1243.6493} = 101.9664 \text{ 取 } 102$$

$$n_h = \frac{\frac{N_h S_h}{\sqrt{c_h}}}{\sum_{h=1}^L \frac{N_h S_h}{\sqrt{c_h}}} \times n \quad n_1 = \frac{\frac{80 \times \sqrt{0.2532}}{\sqrt{64}}}{25.3621} \times 102 = 20.2013 \text{ 取 } 20$$

$$n_2 = \frac{\frac{60 \times \sqrt{0.2441}}{\sqrt{100}}}{25.3621} \times 102 = 11.9221 \text{ 取 } 12$$

$$n_3 = n - n_1 - n_2 = 70$$

【版權所有，重製必究！】