《平面測量與施工測量》

林昇老師　主解

一、今以同一台全站儀(Total Station)觀測某一三角形之內角和，一共觀測9次，得內角和閉合差為-1″、0″、2″、-4″、-1″、1″、-2″、3″及0″，請計算此三角形內角和之中誤差，並推算該全站儀之測角中誤差。(20分)

試題評析	依中誤差公式計算即可，惟應進一步判斷是否有誤差超過可信區間。
考點命中	《高點建國測量學講義》，林昇老師編撰，第一章概論，PAGE-05。

解：

1.無真值，以平均值取代真值計算中誤差，其公式如下:

n次觀測的平均值：$x=\dfrac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}=\dfrac{[l]}{n}=$

$$x=\frac{-1+0+2-4-1+1-2+3+0}{9}=\frac{-2}{9}=-0.22''$$

觀測誤差：觀測值(各別獨立l_i)與平均值(x)之差異$v_i=l_i-x$

觀測量之中誤差爲:$m=\pm\sqrt{\dfrac{[v\cdot v]}{n-1}}$

$$m=\pm\sqrt{\frac{(-0.78)^2+(0.22)^2+(2.22)^2+(-3.78)^2+(-0.78)^2+(1.22)^2+(-1.78)^2+(3.22)^2+(0.22)^2}{9-1}}$$

$$m=\pm\sqrt{\frac{35.56}{8}}=\pm2.11''$$

2.誤差落於三倍中誤差的可信區間爲 99.7%，本題之誤差均未超過三倍中誤差，故不需剔除任一觀測量。

3.最或是值之中誤差(標準差)：$M=\pm\sqrt{\dfrac{[v\cdot v]}{n\cdot(n-1)}}=\pm\sqrt{\dfrac{35.56}{9\cdot 8}}=\pm0.7''$

二、於臺灣西南沿岸小範圍區域內有三個已知正高(Orthometric Height)H 的水準點 A、B、C，及一個未知高程的水準點 D，今利用 GNSS 測得四個點的橢球高(Ellipsoid Height)h，並利用內政部公布 103 年臺灣地區大地起伏模型查得此四個點的大地起伏(Geoidal Height) N^{model}，相關數據如下表所示，單位為公尺，請回答以下問題：(每小題 10 分，共 20 分)

點號	正高(H)	橢球高(h)	大地起伏(N^{model})
A	6.475	12.345	5.896
B	4.739	10.617	5.902
C	11.069	16.945	5.898
D	未知	10.525	5.901

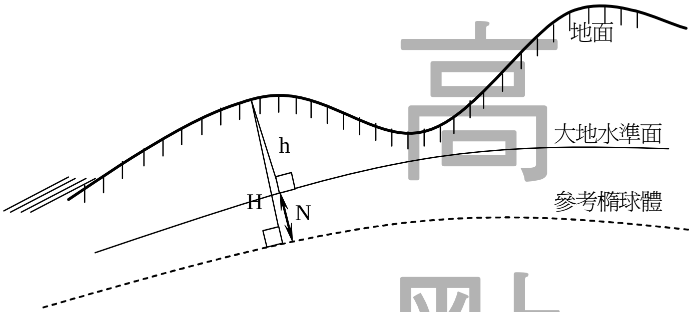
(一)請繪圖説明正高、橢球高與大地起伏之間的關係。

(二)在需考量內政部公布台灣地區大地起伏模型的情況之下，請問D點的正高為何

試題評析	依據橢球高與正高之間的關係，推算D點之正高。
考點命中	《高點建國測量學講義》，林昇老師編撰，測量概論，PAGE-02。

解：

一、 大地起伏 N



水準測量成果由水準面起算，為正高 h
衛星定位成果由參考橢球體起算，為橢球高 H
參考橢球體與水準面之差異為大地起伏。
於同一位置施測水準及衛星定位，即可推算大地起伏。

二、 正高推算

不知 A、B、C 三點與 D 點之相對關係，以 A、B、C 三點各項平均值推算

點號	正高	橢球高	實測大地起伏	(理論大地起伏) 橢球高-正高	差值
A	6.475	12.345	5.896	5.870	0.026
B	4.739	10.617	5.902	5.878	0.024
C	11.069	16.945	5.898	5.876	0.022
D	**4.648**	10.525	5.901	5.877	0.024

先計算橢球高-正高之理論大地起伏值。
A、B、C 三點之實際測得大地起伏值與理論大地起伏值差異平均值 0.024。
以 0.024 視為 D 點之實際測得大地起伏值與理論大地起伏值差異推算 D 點正高應為 4.648

三、衛星定位測量中，常利用差分定位(Differential Positioning)來提升定位精度；請列出各種可能的差分定位方式，並說明各種差分定位方式可以消除或減少哪些誤差？(20 分)

試題評析	須了解衛星定位測量中的差分定位公式之各種組合的效果。
考點命中	《高點建國測量學講義》，林昇老師編撰，衛星定位測量PAGE-04。

解：

衛星定位測量中的差分定位，是透過載波相位觀測方程式的各種組合去消除誤差，並透過長時間的觀測，組成方程式，解算方程式的未知數。

$$L_i^j = R_i^j + c\cdot(dt_i - dT^j) + dtrop_i^j - dion_i^j + \lambda_k \cdot N_i^j + \varepsilon L_i^j$$

(上標:衛星編號.下標:接收器編號)

單頻載波相位觀測_線性組合

地面一次差： $\Delta L = \Delta R + c\cdot\Delta dt \qquad + \Delta dtrop - \Delta dion + \lambda_k \cdot \Delta N + \Delta\varepsilon \cdot L$

(消除衛星時鐘誤差)

空中一次差: $\nabla L = \nabla R \quad + c \cdot \nabla dT + \nabla dtrop - \nabla dion + \lambda_k \cdot \nabla N + \nabla \varepsilon \cdot L$

(消除地面時鐘誤差)

二次差 : $\nabla\Delta L = \nabla\Delta R \quad + \nabla\Delta dtrop - \nabla\Delta dion + \lambda_k \cdot \nabla\Delta N + \nabla\Delta\varepsilon \cdot L$

(消除地面與衛星的時鐘誤差)

三次差 : $\delta\nabla\Delta L = \delta\nabla\Delta R \quad + \delta\nabla\Delta dtrop - \delta\nabla\Delta dion \quad + \delta\nabla\Delta\varepsilon \cdot L$

(消除地面與衛星的時鐘誤差與周波未定值)

雙頻載波相位觀測_線性組合

L3載波:無電離層線性組合---消除電離層dion效應,但週波未定值非整數

$$L_3 = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 = R + c \cdot (dt - dT) + dtrop \quad + \lambda_1 \cdot (\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2) + \varepsilon L3$$

$$L_3 = \beta_1 L_1 + \beta_2 L_2 = R + c \cdot (dt - dT) + dtrop \quad + \lambda_2 \cdot (\beta_1 N_1 + \beta_2 N_2) + \varepsilon L3$$

L4載波:無幾何距線性組合---消除幾何距離R及對流層dtrop效應

$$L_4 = L_1 - L_2 = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 - dion_4 + \varepsilon L_4$$

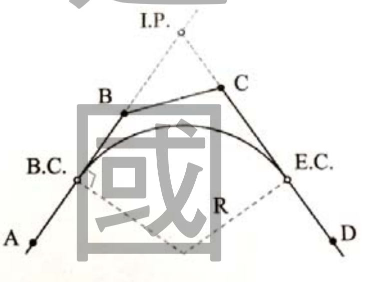
L5載波:寬巷線性組合---獲得波長較L1&L2爲長,且具整數之周波未定值之組合波

$$L_5 = R + c(dt - dT) + dtrop - dion_5 + \lambda_5 N_5 + \varepsilon L_5 \ldots (N_5 = N_1 - N_2)$$

L6載波:窄巷線性組合---獲得波長較L1&L2爲短,且具整數之周波未定值之組合波

$$L_6 = R + c(dt - dT) + dtrop - dion_6 + \lambda_6 N_6 + \varepsilon L_6 \ldots (N_6 = N_1 + N_2)$$

四、一圓曲線如下圖所示，其中切線交點（I.P.）無法於現場定樁，但於兩條切線上有四個已知控制點 A、B、C、D，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 及 $\overline{CD}$ 邊之方位角分別為 $\varphi_{AB} = 35°15'20''$、$\varphi_{BC} = 75°20'40''$ 及 $\varphi_{CD} = 144°48'30''$，$\overline{BC}$ 邊長度為 130 m，B 點樁號為 150K+328.25 m，今欲測設之曲線半徑 R 為 165 m，請計算曲線中心角、曲線弧長、曲線弦長、曲線起點（B.C.）樁號以及曲線終點（E.C.）樁號。（20 分）



試題評析	路線測量之延伸題型，僅需進一步了解三角形外角的計算即可。
考點命中	《高點建國測量學講義》，林昇老師編撰，路線測量例題page17

解：

∠IPBC=$\phi_{BC}-\phi_{AB}$=75°20’40”−35°15’20”=40°05’20”

∠IPCB=$\phi_{DC}-\phi_{CB}$=(144°48’30”+180°)−(75°20’40”+180°)=69°27’50”

∠IP=180−∠IPBC−∠IPCB=70°26’50”

依據正弦公式可推算 $\overline{IPB}$ 之距離，$\dfrac{\overline{IPB}}{\sin(\angle IPCB)} = \dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle IP)}$，$\overline{IPB}$=129.189m

外偏角=圓心角=θ=∠IPBC+∠IPCB=109°33’10”

切線長 $T = R \cdot \tan(\dfrac{\theta}{2})$ =233.698m

弧長: $S = R \cdot \theta_{弳度}$ =315.489m

弦長: $D = 2 \cdot R \cdot \sin(\frac{\theta}{2})$ =269.579m

$\overline{B-BC} = T - \overline{IP-B}$ =233.698-129.189=104.509

曲線起點樁號:150328.25-104.509=150K+223.741

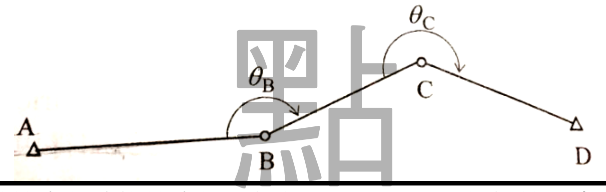
曲線終點樁號:150223.741+315.489=150K+539.230

曲線中心點樁號:150223.741+315.489/2=150K+381.485

五、如下圖，由已知控制點 A 施測導線，經點 B、C 後附合到已知控制點 D，觀測量為水平角 θ_B、θ_C 及水平距 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 及 $\overline{CD}$，請回答以下問題：

㈠請提出一個計算點 B、C 坐標之程序，若無法計算，亦須說明其原因。(15 分)

㈡請說明此導線測量是否具有多餘觀測？若有的話，其多餘觀測數為何？(5 分)



試題評析	需列導線計算方程式推算未知數個數，以判斷是否能解算及多餘觀測數。
考點命中	《高點建國測量學講義》，林昇老師編撰，導線測量範例page18。

解：

一、是否可解算

導線計算的基本計算式如下:

$$\begin{cases} X_B = X_A + \Delta X_{AB} = X_A + D_{AB} \cdot \sin Azi_{\overline{AB}} \\ Y_B = Y_A + \Delta Y_{AB} = Y_A + D_{AB} \cdot \cos Azi_{\overline{AB}} \end{cases}$$

依此類推，可逐次計算 B、C 及 D 點之坐標。

可組成六道方程式

B 及 C 點為未知點，包含 4 個未知數。

上式亦須知 AB 之方位角，亦惟本題所缺乏之數據。

方程式個數多於未知數個數，故可解算

二、多餘觀測數

六道方程式、五個未知數，故多餘觀測數僅為 1。