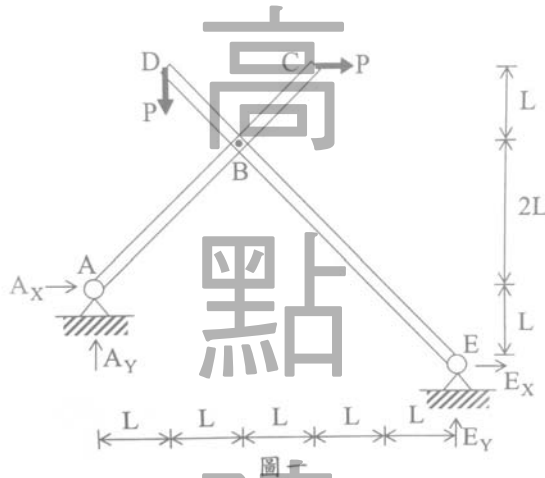


工程力學 (包括材料力學)

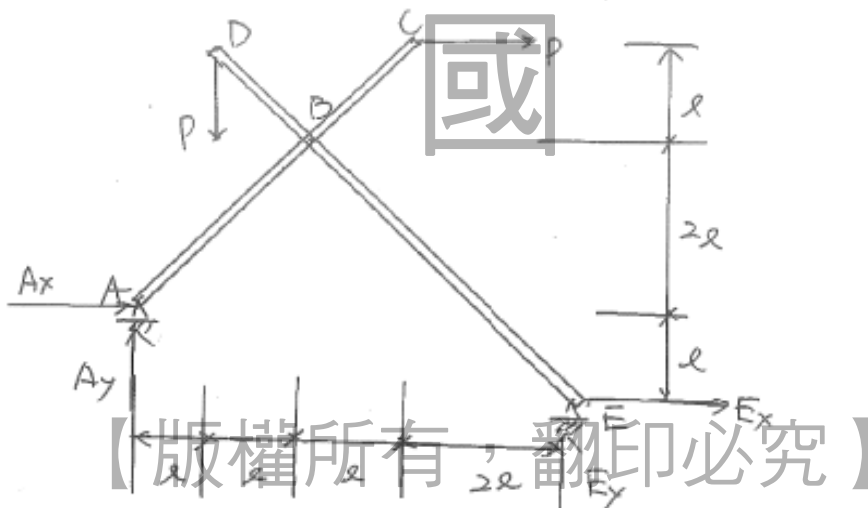
洪達、程中鼎老師 主解

- 一、圖一結構中A、E點為鉸支承，AC桿與DE桿於B點以鉸接方式聯結。載重P分別施加在C、D點。試求在此外力作用下，支承A及支承E反力 A_x 、 A_y 與 E_x 、 E_y 之大小及方向為何？(25分)



試題評析	題目屬簡單，基本題型！
考點命中	《高點建國靜力學講義》洪達老師編撰，第二章19頁

解：



取整體： $\sum M_A = 0$ ， \curvearrowright

$$\therefore E_x(l) + E_y(5l) - P(3l) - p(l) = 0 \quad (1)$$

取 DBE 自由體分析：

$$\therefore \sum M_B = 0, \curvearrowright$$

$$\therefore E_x(3l) + E_y(3l) + P(l) = 0 \quad (2)$$

\therefore 由(1)、(2)式得：

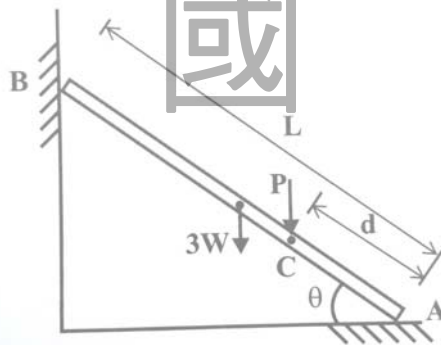
$$E_x = -1.4167P = 1.4167P \quad (\leftarrow)$$

$$E_y = 1.083P \quad (\uparrow)$$

$$\therefore A_x = 0.4167P \quad (\rightarrow)$$

$$A_y = 0.083P \quad (\uparrow)$$

- 二、圖二顯示於牆體邊，傾斜靜置一根長度 L 為 $4m$ 、重量為 $3W$ 之均勻桿件。已知此桿件傾斜角度 θ 為 40° ，於 A 、 B 處之靜摩擦係數分別為 $\mu_A = 0.3$ 、 $\mu_B = 0.2$ ，若於桿件 C 處，施加一垂直力 $P = 14W$ 而不使桿件下滑移動，試求此情況下 d 之最大長度為何？(25分)



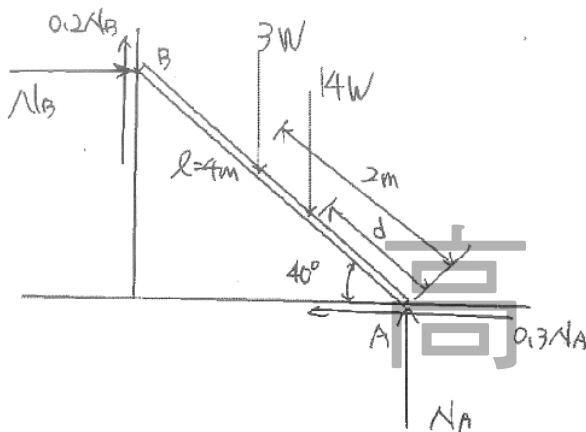
圖二

【版權所有，翻印必究】

試題評析 題目屬簡單，基本題型！

考點命中 《高點建國靜力學講義》洪達老師編撰，第三章18頁。

解：



$$\therefore \sum F_x = 0 \quad \leftarrow$$

$$\therefore 0.3N_A - N_B = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\therefore \sum F_y = 0 \quad \uparrow$$

$$\therefore N_A + 0.2N_B - 3W - 14W = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\therefore \sum M_B = 0 \quad \curvearrowright$$

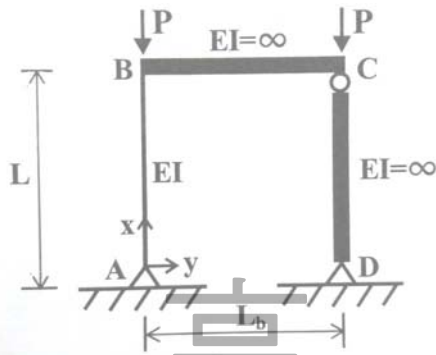
$$\therefore N_A (4 \cos 40^\circ) - 0.3N_A (4 \sin 40^\circ) - 3W(2 \cos 40^\circ)$$

$$- 14W(4-d) \cos 40^\circ = 0$$

\therefore 由 (1), (2), (3) 式得:

$$d = 1m$$

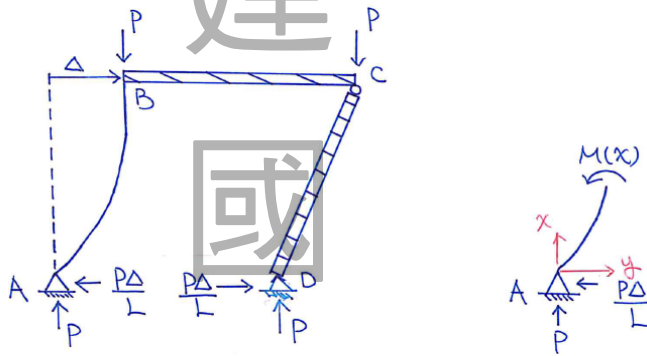
三、圖三為一框架結構，桿件BC及CD相較桿件AB之EI為 $\frac{1}{4}$ ，Lb長度相較桿件的變形甚大。已知二垂直載重P分別施加在B點及C點，試求此框架結構挫屈時，桿件AB的挫屈載重之有效長度係數K為何？（提示： $P_{cr} = \pi^2 EI / (KL)^2$ ，分析用之參考坐標為A點處之xy坐標）（25分）



試題評析	<p>本題其實是鋼結構設計科目中，「靠桿」之題目。所謂的靠桿是指結構系統中二端為鉸接且未有適當的側向支撐之壓力桿件，當整體支撐系統有側向位移時，靠桿除了無法提供承載力外，反而因為缺乏適當的側向支撐而引致系統產生多餘的側向力，大幅降低系統的承載能力，此種現象稱為靠桿效應。雖然您可能沒學過鋼結構設計，但是解題觀念跟我們上課提過的彈性柱一樣喔！彈性柱推導上課提過很重要，考出來一定要拿分。本題難度屬中等。</p>
考點命中	<p>《高點建國材料力學講義第三回》，程中鼎編撰，第8頁。 《高點建國鋼結構設計講義第一回》，程中鼎編撰，第72頁。</p>

解：

題目已說明CD桿件之EI為 ∞ ，因此CD桿件受彎後會保持**剛體運動**，假設C點有一側向位移 Δ ，D點會有額外水平力 $\frac{P\Delta}{L}$ 作用。由水平方向力平衡，A點亦會有 $\frac{P\Delta}{L}$ 作用，如下圖。



【版權所有，翻印必究】

此時柱 AB 會因額外水平力作用而使柱之有效長度係數 K 增加，推導如下：
繪出柱 AB 微小擾動後之變形，座標採用第一象限。可寫出彎矩函數 $M(x)$

$$M(x) = Py + \frac{P\Delta}{L}x$$

由梁的二階微分方程式(第四象限特別小心)

$$y'' = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI}\left(-Py - \frac{P\Delta}{L}x\right) \Rightarrow y'' + \frac{Py}{EI} = -\frac{P\Delta}{EIL}x$$

$$\text{令 } \lambda^2 = \frac{P}{EI} \Rightarrow y'' + \lambda^2 y = -\lambda^2 \frac{\Delta}{L}x$$

上式為二階齊次線性微分方程式，其解為

$$y = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x - \frac{\Delta}{L}x$$

將上式微分可得

$$y' = A\lambda\cos\lambda x - B\lambda\sin\lambda x - \frac{\Delta}{L}$$

由邊界條件可寫出以下三式

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \dots (1)$$

$$y(L) = \Delta \Rightarrow A\sin\lambda L + B\cos\lambda L - 2\Delta = 0 \dots (2)$$

$$y'(L) = 0 \Rightarrow A\lambda\cos\lambda L - B\lambda\sin\lambda L - \frac{\Delta}{L} = 0 \dots (3)$$

將(1)、(2)及(3)式寫成矩陣形式

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin\lambda L & \cos\lambda L & -2 \\ \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

欲求 A 、 B 及 Δ 之非零解可令

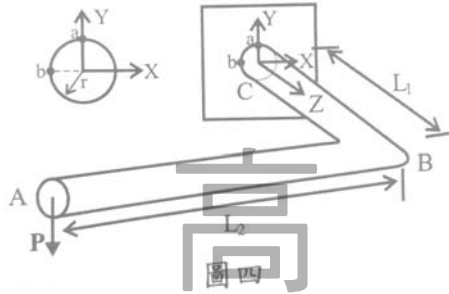
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin\lambda L & \cos\lambda L & -2 \\ \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L & -\frac{1}{L} \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2\lambda L = \tan\lambda L$ (此式即為材力中的挫屈方程式)

由試誤法可解 $\lambda L = 1.165$ 。將 $\lambda L = 1.165$ 代回 $\lambda^2 = \frac{P}{EI}$ 可得挫屈載重 P_{cr}

$$\text{挫屈載重 } P_{cr} = EI\lambda^2 = EI\left(\frac{1.165}{L}\right)^2 = \frac{\pi^2 EI}{(2.7L)^2} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}, \text{ 因此 } \underline{K = 2.7}$$

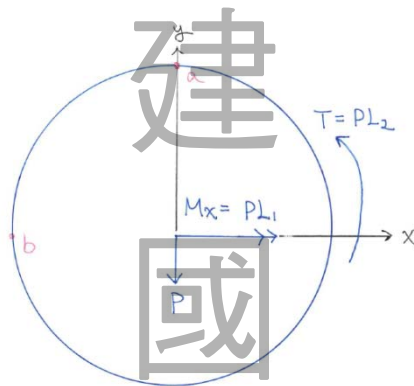
四、圖四為一個斷面圓形、半徑 $r=10\text{ cm}$ 之L型托架ABC，於托架A端承受 $P=1000\text{ kgf}$ 之垂直載重。已知 $L_1=100\text{ cm}$ 、 $L_2=200\text{ cm}$ ，試求固定端C處之a點及b點的最大主應力為何？（25分）



試題評析	本題屬於合成應力題型，在課堂上我們談論過合成應力考試前必做，因為考出來的機會太大了。FB社團亦再提醒此類題目之重要。本題算是合成應力中簡單題型，有算過要拿分並不難。本題難度屬中等偏易。
考點命中	《高點建國材料力學講義第二回》，程中鼎編撰，第46頁。

解：

將自由端A處力量P移至C處斷面後，C處斷面力量分佈如下



$$P = 1000\text{ kgf}$$

$$M_x = PL_1 = 1000(100) = 100 \times 10^3\text{ kgf-cm}$$

$$T = PL_2 = 1000(200) = 200 \times 10^3\text{ kgf-cm}$$

求固定端C處a點最大主應力

$$\sigma_z = \frac{M_{xy}}{I_x} = \frac{(100 \times 10^3)10}{7853.982} = 127.324 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\tau_{yz} = \tau_T = \frac{T\rho}{J} = \frac{(200 \times 10^3)10}{2(7853.982)} = 127.324 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{最大主應力 } \sigma_1 &= \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{yz})^2} = \left(\frac{127.324+0}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{127.324-0}{2}\right)^2 + (127.324)^2} \\ &= 206.015 \text{ kgf/cm}^2 \end{aligned}$$

求固定端C處b點最大主應力

$$\tau_T = \frac{T\rho}{J} = \frac{(200 \times 10^3)10}{2(7853.982)} = 127.324 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\tau_V = \frac{4V}{3A} = \frac{4(1000)}{3(\pi \times 10^2)} = 4.244 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\tau_{yz} = \tau_T + \tau_V = 131.568 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\text{最大主應力 } \sigma_1 = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{yz})^2} = 0 + \sqrt{(0)^2 + (131.568)^2} = 131.568 \text{ kgf/cm}^2$$

高
點
建
國

【版權所有，翻印必究】