

## 103年公務人員高等考試三級考試試題

類 別：土木工程、結構工程

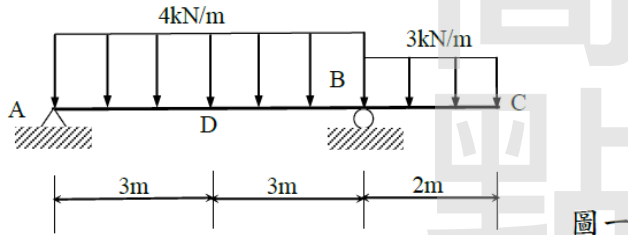
科 目：結構學

考試時間：2小時

※注意：(一)可以使用電子計算器。

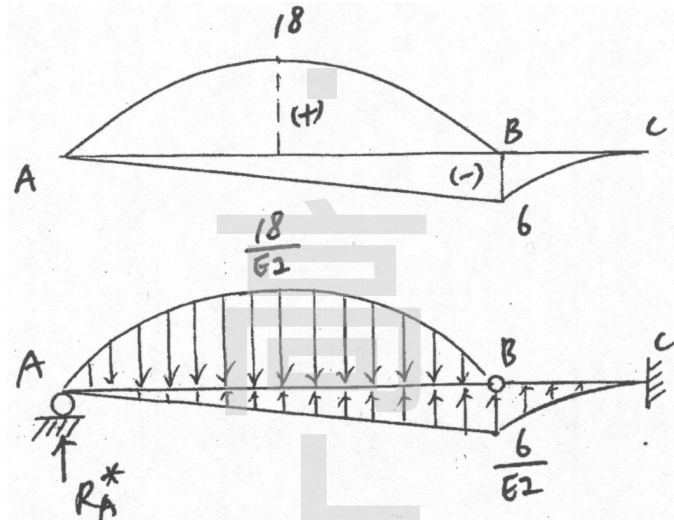
(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

毛昭綱老師 主解

一、試用共軛梁法，求圖一梁結構點C和點D的垂直位移，設 $EI = 3,000\text{kN}\cdot\text{m}^2$ 。(25分)

解：

解①原梁彎矩圖與共軛梁彈性載重

②  $\Delta_C$  及  $\Delta_D$ 

$$R_A^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{18}{EI} (3) - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right) \frac{6}{EI} (6) = \frac{30}{EI} (\uparrow)$$

$$B_y = \frac{2}{3} \cdot \frac{18}{EI} (3) - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \right) \frac{6}{EI} (6) = \frac{24}{EI} (\uparrow)$$

$$M_C^* = \Delta_C = -B_y (2) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right) \frac{6}{EI} (2) \frac{3}{4} (2) = -\frac{48}{EI} + \frac{6}{EI}$$

【版權所有，重製必究！】

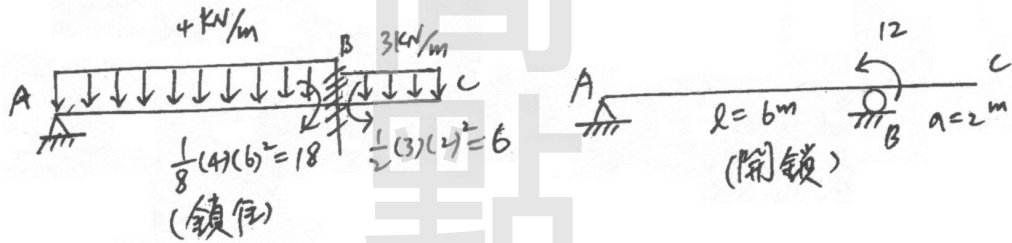
$$= -\frac{42}{EI} = -0.014\text{m}(\uparrow)$$

$$M_D^* = \Delta_D = R_A^*(3) - \frac{2}{3} \cdot \frac{18}{EI} (3) \frac{3}{8} (3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{EI} (3)(1)$$

$$= -\frac{90}{EI} - \frac{81}{2EI} + \frac{9}{2EI} = \frac{54}{EI} = 0.018\text{m}(\downarrow)$$

討論：另以公式疊加法計算如下

1.  $\Delta_C$  (鎖住開鎖)

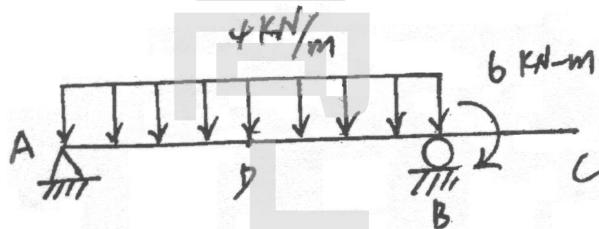


$$\Delta_{C1}(\text{鎖住}) = \frac{W_2 a^4}{8EI} = \frac{3(2)^4}{8(3000)} = 0.002\text{m}(\downarrow)$$

$$\Delta_{C1}(\text{開鎖}) = \frac{M\ell}{3EI} (a) = \frac{12(6)(2)}{3(3000)} = 0.016\text{m}(\uparrow)$$

$$\therefore \Delta_C = \Delta_{C1} - \Delta_{C2} = 0.002 - 0.016 = -0.014\text{m}(\uparrow)$$

2.  $\Delta_C$  (等值載重)

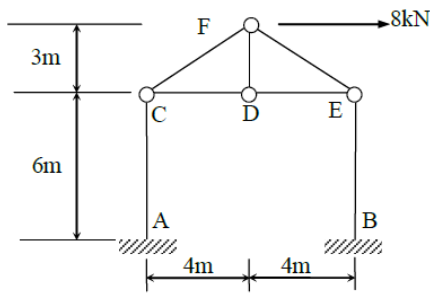


$$\Delta_D = \frac{SW_1 \ell^4}{384EI} - \frac{M\ell^2}{16EI}$$

$$= \frac{5(4)(6)^4}{384(3000)} - \frac{6(6)^2}{16(3000)} = 0.0225 - 0.0045 = 0.018\text{m}(\downarrow)$$

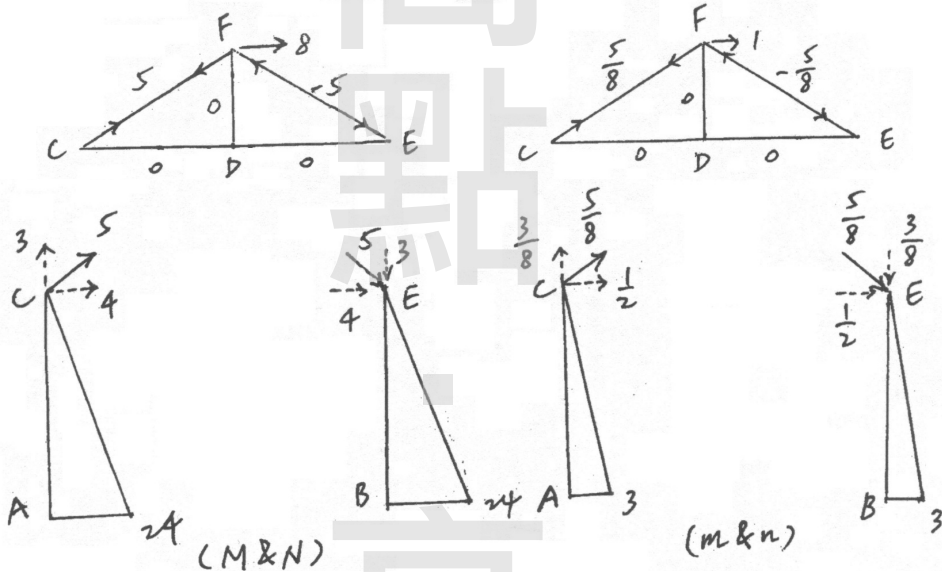
二、圖二平面構架點A及B為固定，點C、D、E及F為鉸接，此構架點F承受一水平載重8 kN，考慮桿件軸向及撓曲變形，設所有桿件EA=20,000kN，EI = 8,000 kN·m<sup>2</sup>，試求點F水平位移。(25分)

【版權所有，重製必究！】



圖二

解：本組合構架為一度靜不定反對稱結構，但由於FD桿為零力桿(zero bar)，故無需求解贅力。且為滿足反對稱性及平衡CD桿及DE桿均無內力。以單位力法求解F點水平位移



$$\Delta F = \sum \frac{n \cdot N \cdot \ell}{EA} + \int \frac{mMdx}{EI}$$

$$= \frac{1}{EA} \left[ (5)\left(\frac{5}{8}\right)(5) + (-5)\left(-\frac{5}{8}\right)(5) + 3\left(\frac{3}{8}\right)(6) + (-3)\left(-\frac{3}{8}\right)(6) \right] + \frac{1}{3} \cdot \frac{24}{EI} (3)(6)(2)$$

$$= \frac{44.75}{EA} + \frac{288}{EI} = \frac{44.75}{20000} + \frac{288}{8000}$$

$$= 0.0022375 + 0.036 = 0.0382375\text{m} = 3.82\text{cm}(\rightarrow)$$

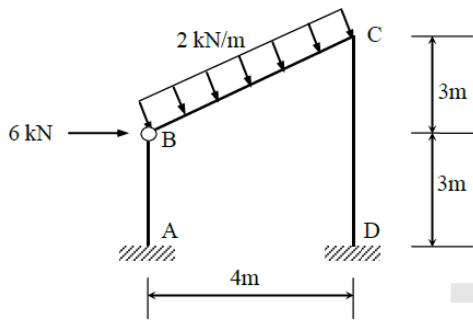
討論：剛架考慮軸向變形所貢獻F點水平位移為  $\frac{13.5}{EA} = 0.000675\text{m}$ ，佔整體  $\Delta_F$  比例為

$$\frac{0.000675}{0.0382375} \times 100\% = 1.77\%$$

，故一般剛架僅考慮撓曲變形即可

三、圖三平面構架點A及D為固定，點B為鉸接，此構架點B承受一水平集中載重6 kN，桿件BC承受一垂直於桿件之均佈載重，沿桿件方向每公尺2 kN。設所有桿件EI為定值，且忽略桿件軸向變形，試用彎矩分配法，求支承A之反力，並繪出此結構之彎矩圖。（25分）

【版權所有，重製必究！】



圖三

解：①桿端彎矩

$$k_{BC} : k_{CD} = \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = 6 : 5$$

$$M_{CB}^F = \frac{1}{8} (2)(5)^2 = 6.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

假設構架側移  $\Delta$

$$M_{AB}^F = \frac{-3EI\Delta}{9} = \frac{-EI\Delta}{3} = -2x$$

$$M_{CD}^F = M_{DC}^F = \frac{-6EI\Delta}{36} = -\frac{EI\Delta}{6} = -x$$

AB	CB	CD	DC
	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$	
$-2x$	6.25	$-x$	$-x$
	$6y$	$5y$	$2.5y$
$-2x$	$6y+6.25$	$-x+5y$	$-x+2.5y$

由  $\Sigma M_C = 0$  得  $x - 11y = 6.25 \dots\dots(1)$

由  $\Sigma F_x = 0$  即  $\frac{M_{AB}}{3} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{6} + 6 + 2 \times 5 \times \frac{3}{5} = 0$   
 得  $6x - 7.5y = 72 \dots\dots(2)$

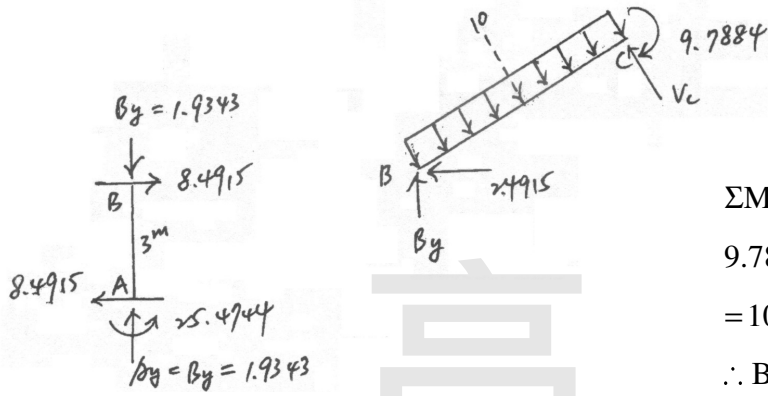
解(1)(2)兩式，可得  $x = 12.73718$ ， $y = 0.58974$

代回各桿端彎矩  $M_{AB} = -25.4744 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (↺)， $M_{CB} = 9.7884 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (↻)

$M_{CD} = -9.7884 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (↻)， $M_{DC} = -11.2628 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (↺)

②桿件內力分析

【版權所有，重製必究！】



$$\sum M_C = 0$$

$$9.7884 + 2.4915 \times 3 + B_y(4)$$

$$= 10 \times 2.5$$

$$\therefore B_y = 1.9343 \text{ kN}$$

故A支承反力有  $A_x = 8.4915 \text{ kN}(\leftarrow)$  ,  $A_y = 1.9343 \text{ kN}(\uparrow)$

$$M_A = 25.4744 \text{ kN-m} (\curvearrowright)$$

③ 彎矩圖

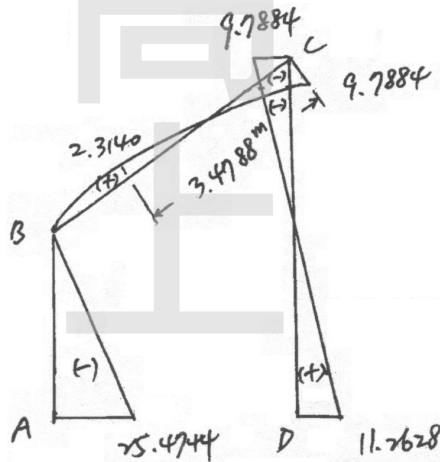
BC桿最大正彎矩計算(如上圖)

$$V_C = \frac{9.7884}{5} + \frac{1}{2}(2)(5) = 6.9577 \text{ kN}$$

故最大正彎矩發生位置距C點  $\frac{6.9577}{2} = 3.4788 \text{ m}$

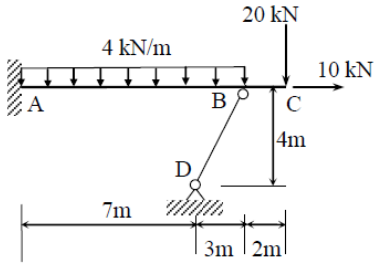
$$M_{\max}^+ = \frac{1}{2}(2)(3.4788)^2 - 9.7884 = 2.3140 \text{ kN-m}$$

可得彎矩圖

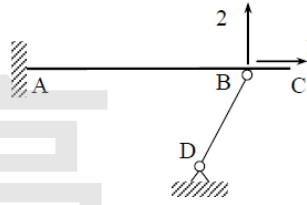


【版權所有，重製必究！】

四、圖四(a)結構點A為固定，點B連接一軸力桿BD，此結構承受載重如圖所示。設所有桿件E相同，桿件AB及BC 慣性矩 $I=0.02\text{m}^4$ ，面積 $A=0.2\text{m}^2$ ，桿件BD面積 $A=0.1\text{m}^2$ 。若此結構位移自由度簡化為2個自由度如圖四(b)所示，在考慮桿件軸向及撓曲變形下，試用直接勁度法求對應這些自由度之勁度矩陣及外力向量，並求出支承點A之反力及桿件BD內力。(25分)



圖四(a)

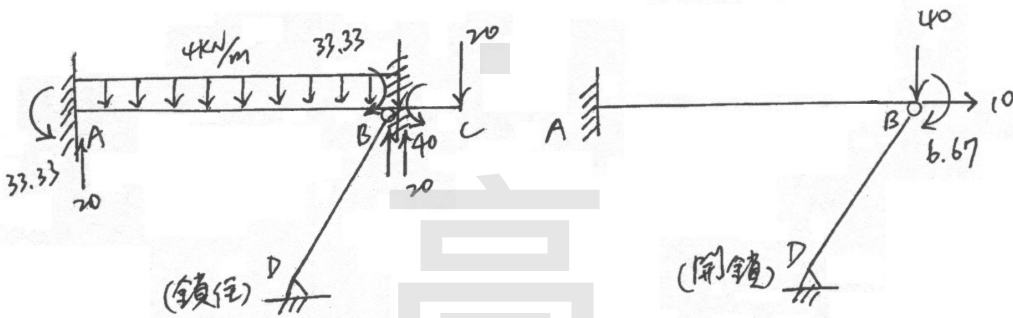


圖四(b)

解：

本題應有3個動不定度，除圖四(b)所示2度之外，尚有B點旋轉自由度 $r_3$ ，惟題目要求僅以2度解之，可先依3度到勁度矩陣式，再利用靜濃縮(static condense)，即高斯消去(Gauss elimination)消去 $r_3$ 自由度

①求固端反力及等值結點載重



故可得濃縮前外力向量  $\{R\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ -40 \\ 6.67 \end{Bmatrix}$

而A端固定反力  $\begin{Bmatrix} N_A^F \\ V_A^F \\ M_A^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \\ -33.33 \end{Bmatrix}$  (↑) (↺)

【版權所有，重製必究！】

②各自由度一單位變位所需之力

由右列各圖可知

$$k_{11} = \frac{E(0.2)}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{E(0.1)}{5} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= 0.0272E$$

$$k_{21} = \frac{3}{5} \cdot \frac{E(0.1)}{5} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= 0.0096E$$

$$k_{31} = 0$$

$$k_{22} = \frac{4}{5} \cdot \frac{E(0.1)}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{12E(0.02)}{1000}$$

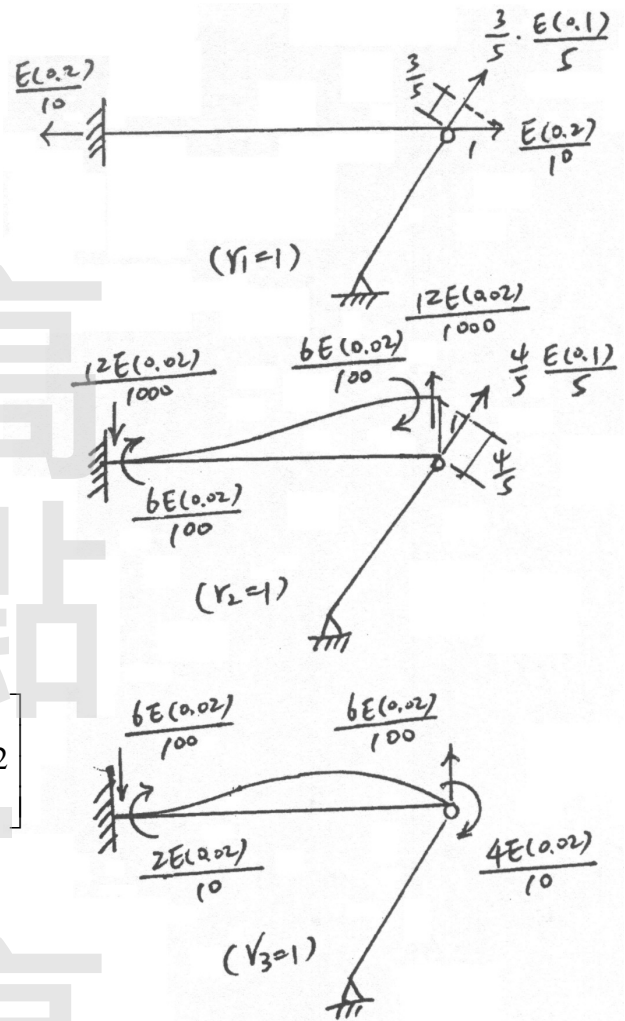
$$= 0.01304E$$

$$k_{23} = \frac{6E(0.02)}{100} = 0.0012E$$

$$k_{33} = \frac{4E(0.02)}{10} = 0.008E$$

故可得

$$[K]_{3 \times 3} = E \begin{bmatrix} 0.0272 & 0.0096 & 0 \\ 0.0096 & 0.01304 & 0.0012 \\ 0 & 0.0012 & 0.008 \end{bmatrix}$$



③靜濃縮得2度勁度矩陣式

由  $\{R\} = [K]\{r\}$  第三式，即

$$(0.0012r_2 + 0.008r_3)E = 6.67$$

$$\text{可得 } r_3 = \frac{833.33}{E} - 0.15r_2$$

代入前二式，可消去  $r_3$  自由度，第一式無  $r_3$  自由度，可不修正第二式變為

$$\left[ 0.0096r_1 + 0.01304r_2 + 0.0012 \left( \frac{833.33}{E} - 0.15r_2 \right) \right] E = -40$$

$$\Rightarrow 0.0096r_1 + 0.01286r_2 = -41$$

故可將勁度矩陣式修正為

$$\{\bar{R}\} = [\bar{K}]\{\bar{r}\}$$

【版權所有，重製必究！】

$$\text{即 } \begin{Bmatrix} 10 \\ -41 \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 0.0272 & 0.0096 \\ 0.0096 & 0.01286 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \dots\dots(1)$$

其中  $\{\bar{\mathbf{R}}\}$ 、 $\{\bar{\mathbf{K}}\}$  即為所求

④ 變位計算

由(1)可解得

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \frac{3881.51}{E} \begin{bmatrix} 0.1286 & -0.0096 \\ -0.0096 & 0.0272 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ -41 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2026.92}{E} \\ -4701.28 \\ \frac{E}{E} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (\rightarrow) \\ (\downarrow) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{833.33}{E} - 0.15r_2 = \frac{833.33}{E} + 0.15 \times \frac{4701.28}{E} \\ &= \frac{1538.53}{E} (\curvearrowright) \end{aligned}$$

⑤ 支承A反力及BD桿內力

$$\begin{Bmatrix} N_A \\ V_A \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02E r_1 \\ -0.00024E r_2 - 0.0012E r_3 \\ 0.0012E r_2 + 0.004E r_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_A^F \\ V_A^F \\ M_A^F \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 40.54 \\ -0.72 \\ 0.53 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \\ -33.33 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40.54 \\ 19.28 \\ -32.8 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{kN} & (\leftarrow) \\ \text{kN} & (\uparrow) \\ \text{kN-m} & (\curvearrowright) \end{matrix}$$

$$N_{BD} = \frac{3}{5} \cdot \frac{E(0.1)}{5} r_1 + \frac{4}{5} \frac{E(0.1)}{5} r_2 = -50.90 \text{kN (壓)}$$

【版權所有，重製必究！】