

《統計學概要》

試題評析

第一題考的是觀念，沒有太複雜的計算，只要觀念清楚的考生，要拿到第一大題的滿分實在不難。

第二大題考「迴歸」，跟以往的考題差不多，只要考生有常練習迴歸中的基本計算題，滿分也是輕而易舉。因此，一般同學應可拿到80~90分，程度較佳者有拿滿分的可能。

一、改正下列問題：(每小題各5分，共30分)

(一) 假設母體為指數分配，其平均值為 μ 、變異數為 σ^2 ，當 $n=26$ 時， \bar{X}_n 呈常態分配。

(二) F 分配的最小與最大可能值為 $(1, \infty)$ 。

(三) 令 Z 標準常態分配， $\alpha=0.1$ ， $P[|Z| < a] = 1 - \alpha$ ，則 $a=1.96$ 。

(四) 當自由度趨近無窮大時， t -分配會趨近於超幾何。

(五) 假設 A 事件和 B 事件互為獨立，則 $P(A \text{ and } B) = 0$ 。

(六) 3個隨機數字組合，其中至少一位是9之機率是 $0.1+0.1+0.1=0.3$ 。

答：

(一) 指數分配是偏離常態分配非常嚴重，當樣本平均數 \bar{X}_n 使用中央極限定理迫近常態分配時，所需要之樣本數要很多才可以獲得一個滿意的迫使結果，但本題中的樣本數 $n=26$ 過少，故難以根據中央極限定理下達 \bar{X}_n 迫近常態分配的結論

(二) F 分配的變量範圍應該是 $(0, \infty)$

(三) 因為 $P(|Z| < a) = P(-a < Z < a) = 0.9$ ，故 $a=1.645$

(四) 當自由度趨近無窮大， t 分配應該是趨近於標準常態分配

(五) 若 $A \perp B$ ，則 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(六) $P(\text{至少一個位是}9) = 1 - P(\text{沒有一個位是}9) = 1 - (0.9)^3 = 0.271$
(註: 這個算法是假0為百位數仍然考慮)

二、分析K縣的歲入(REVENUE)對該縣每一位小學生教育費用(EXPEND)的影響。假設歲入和費用兩者有直線關係。(單位百萬元)

下表由電腦印出部分統計結果，部分以 a, \dots, j 表示。

DEPENDENT VARIABLE EXPEND			
Variable	Coefficient	St. dev	T-ratio (value)
REVENUE	1.1171	0.121	a
Constant	-1606.5	b	-3.5

R-SQUARED = c

Standard Error = d

Analysis of Variance				
Source	SS	DF	MS	F-Value
Regression	e	f	69499.5	g
Residual	h	19	i	
Total	109456.2	j		

請扼要回答下列問題：

(一) 請將表內 (a, \dots, j) 計算出。(每小題各3分，共30分)

(二) 寫出迴歸估計式。(5分)

(三) 迴歸分析使用了多少樣本(sample size)。(5分)

(四)請簡釋判定係數(Coefficient of Determination)對此迴歸估計式所代表的含意。(10分)

(五)在99%的信賴水準下，請建立REVENUE真實係數可能的範圍。(10分)

(六)在99%的信賴水準下，請驗證REVENUE真實係數是否不等於零。(10分)

答：

(一) a=9.2322, b=459, c=0.635, d=45.858,
 e=69499.5, f=1, g=33.048, h=39956.7,
 i=2102.98, j=20

(二)設迴歸模型為 $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ^{iid}

其中 Y表教育費用；X表歲入

迴歸估計式： $\hat{y} = -1606.5 + 1.1171x$

(三)由ANOVA TABLE得知，樣本數n=21個

(四)判定係數 $R^2 = \frac{SSR}{SST} = 0.635$ ，表示由歲入這個自變數及考慮線性簡迴歸模型下，可以解釋教育費用(Y)的總變異達到63.5%。

(五) β_1 之99%信賴區間為

$$(\hat{\beta}_1 \mp t_{0.005(19)} \sqrt{V(\hat{\beta}_1)}) = (1.1171 \mp 2.861(0.121)) = (0.771, 1.463281)$$

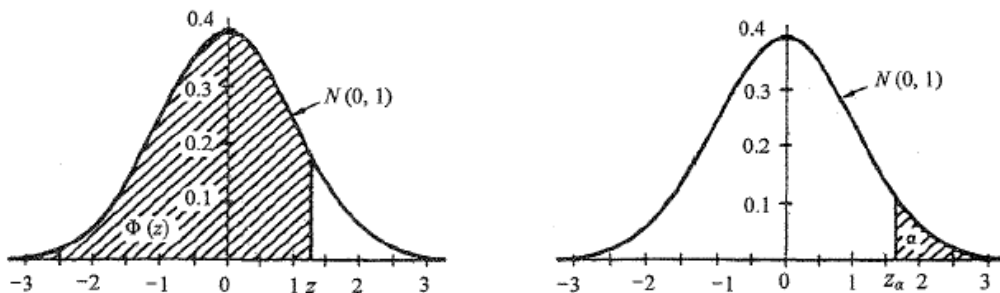
(六) $H_0: \beta_1 = 0$ vs $H_1: \beta_1 \neq 0$

$$\text{T.S.: } T = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{V(\hat{\beta}_1)}} \sim t_{(19)}$$

R.R.: Reject H_0 at $\alpha = 0.01$ if $|T^*| > t_{0.005(19)} = 2.861$

因為 $|T^*| = 9.2322 > 2.861$ 故拒絕 H_0 ，我們有足夠證據去推論歲入之真實係數不等於0。

Table I The Normal Distribution

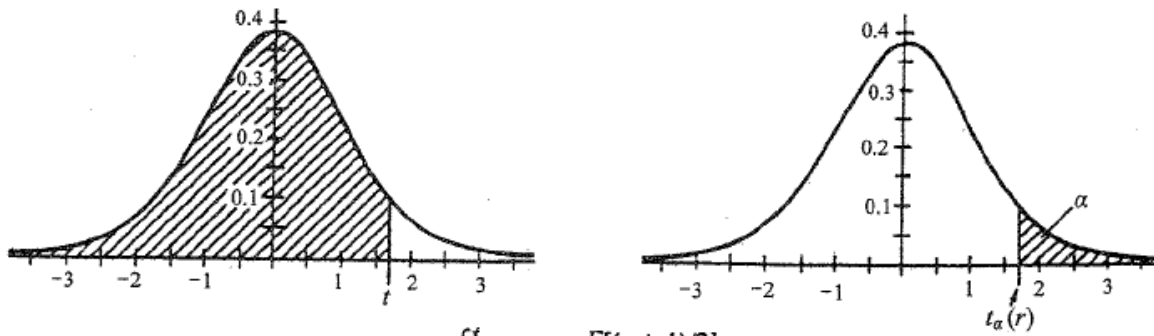


$$P(Z \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw$$

$$[\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)]$$

<i>z</i>	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
<i>α</i>	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001	
<i>z_α</i>	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	
<i>z_{α/2}</i>	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.240	2.576	2.807	3.291	

Table II The t Distribution



$$P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma[(r+1)/2]}{\sqrt{\pi r} \Gamma(r/2) (1+w^2/r)^{(r+1)/2}} dw$$

$$[P(T \leq -t) = 1 - P(T \leq t)]$$

r	$P(T \leq t)$						
	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
r	$t_{0.40}(r)$	$t_{0.25}(r)$	$t_{0.10}(r)$	$t_{0.05}(r)$	$t_{0.025}(r)$	$t_{0.01}(r)$	$t_{0.005}(r)$
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.997
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576