

《統計學》

試題評析

本卷共四大題各25分，各題之考試範圍分別為機率分配、檢定、變異數分析與迴歸分析，可見都沒有超過課程範圍。其中有關檢定、變異數分析與迴歸分析之三題均屬該章節中基礎計算題型，與講義題庫之題型完全符合，要得到此三題之滿分並不難。最有變化性之一題屬於第一大題，此題屬於機率分配之計算題，由於作答過程有應用到條件機率函數與雙重期望值等技巧，對於數學程度不好的考生來說此題是最有挑戰的一題。綜合而言，今年考卷以75分作為基本分。

一、設P的可能性有三種0.1，0.5，0.8其機率分配為

$P = p$	0.1	0.5	0.8	其他
$f(p)$	0.3	0.2	0.5	0

已知 $X|P=p$ 的條件分配為二項分配 $b(n=10, p)$

試求：(一) X 與 P 的聯合機率分配？(8分)

(二) EX ？(8分)

(三) $P|X=3$ 之條件分配？(9分)

答：

(一)

$$f_{XP}(x, p) = f_P(p)f_{X|P}(x|p) = \begin{cases} 0.3 \binom{10}{x} (0.1)^x (0.9)^{10-x}, x=0,1,\dots,10, p=0.1 \\ 0.2 \binom{10}{x} (0.5)^x (0.5)^{10-x}, x=0,1,\dots,10, p=0.5 \\ 0.5 \binom{10}{x} (0.8)^x (0.2)^{10-x}, x=0,1,\dots,10, p=0.8 \end{cases}$$

(二) $E(X) = E[E(X|P)] = E(10P) = 10[(0.1)(0.3) + (0.5)(0.2) + (0.8)(0.5)] = 5.3$

(三)

$P=p$	0.1	0.5	0.8	$f_X(x=3)$
$f_{XP}(x=3, p)$	0.01722	0.02344	0.0003932	0.041053

$$f_{P|X}(p|x=3) = \frac{f_{XP}(x=3, p)}{f_X(x=3)}$$

$P=p$	0.1	0.5	0.8
$f_{P X}(p x=3)$	0.419456	0.570966	0.009578

二、設 $X_1, X_2, \dots, X_{25} \sim N(\mu, \sigma^2 = 64)$ ，若 $H_0: \mu = 5$ v.s. $H_1: \mu = 7$ ，令 $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{25} X_i}{25}$

(一) 當顯著水準為 0.05，則拒絕域為何？ β 風險為何？(8分)

(二) 若樣本數不變時，希望將 β 風險降低至 0.1 時，則 α 風險會增為多少？(8分)

(三) 若希望 α 與 β 風險皆為 0.05，則樣本數又應增加為多少？(9分)

答：

(一) 拒絕域: $C = \{\bar{x} \mid \bar{x} > 5 + 1.645\sqrt{64/25} = 7.632\}$

$$\beta = P(\bar{X} \leq 7.632 \mid \mu = 7) = P(Z \leq 0.395) = 0.652$$

(二) $\beta = P(\bar{X} \leq c \mid \mu = 7) = P(Z \leq \frac{c-7}{\sqrt{64/25}}) = 0.1$

$$\Rightarrow \frac{c-7}{\sqrt{64/25}} = -1.282 \Rightarrow c = 4.9488$$

$$\alpha = P(\bar{X} > 4.9488 \mid \mu = 5) = P(Z > -0.032) = 0.512$$

可得 α 風險增為 0.512

(三) $\alpha = 0.05 = P(\bar{X} > c \mid \mu = 5) = P(Z > \frac{c-5}{\sqrt{64/n}}) \Rightarrow \frac{c-5}{\sqrt{64/n}} = 1.645 \dots (1)$

$$\beta = 0.05 = P(\bar{X} \leq c \mid \mu = 7) = P(Z \leq \frac{c-7}{\sqrt{64/n}}) \Rightarrow \frac{c-7}{\sqrt{64/n}} = -1.645 \dots (2)$$

利用以上(1)(2)兩式解聯立方程，可得 $c=6$, $n=173.19$ 取 174 個

三、在 A, B, C, D 四種品牌的 C.D. 中，做雜訊的測試，結果如下表：

品牌	雜訊
A	62, 65, 60, 65, 58
B	75, 91, 84, 88
C	53, 55, 57, 55, 54, 57, 56
D	55, 56, 55, 57, 55, 52

在單因子 ANOVA 的模型 $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $i=1,2,3,4$, $j=1,2,\dots,n_i$ ，若為固定效應模式時，試求：

(一) $\hat{\alpha}_i$ 估計值為何？(6分)

(二) 編製 ANOVA 表？(6分)

(三) 在 $\alpha = 0.05$ 時，檢定 $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ？(6分)

(四) 求 $\mu_A - \mu_D$ 之 95% 信賴區間？(7分)

答：

(一) $\hat{\alpha}_1 = \bar{Y}_1 - \bar{Y} = 62 - 62.0455 = -0.0455$

$$\hat{\alpha}_2 = \bar{Y}_2 - \bar{Y} = 84.5 - 62.0455 = 22.4545$$

$$\hat{\alpha}_3 = \bar{Y}_3 - \bar{Y} = 55.286 - 62.0455 = -6.7595$$

$$\hat{\alpha}_4 = \bar{Y}_4 - \bar{Y} = 55 - 62.0455 = -7.0455$$

(二)

ANOVA TABLE				
source	SS	d.f.	MS	F
品牌	2634.5	3	878.2	$F^* = 75.06$
Error	210.5	18	11.7	
Total	2845	21		

(三) $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ vs $H_1: \text{至少一個 } \alpha_i \neq 0, i = 1, 2, 3, 4$

$$\text{T.S.: } F = \frac{MSR}{MSE} \sim F_{(3,18)}$$

R.R.: Reject H_0 at $\alpha = 0.05$ if $F^* > F_{0.05(3,18)} = 3.160$

$$\because F^* = 75.06 \quad \therefore \text{reject } H_0$$

結論：我們有足夠的統計證據去推論四種品牌之離訊是有差異的

(四) $\mu_A - \mu_D$ 95%之信賴區間為

$$\begin{aligned} (\bar{X}_A - \bar{X}_D \mp t_{0.025(18)} \sqrt{MSE(\frac{1}{5} + \frac{1}{6})}) &= (62 - 55 \mp 2.101 \sqrt{11.7(\frac{1}{5} + \frac{1}{6})}) \\ &= (2.65, 11.35) \end{aligned}$$

四、已知： $\sum_{i=1}^{12} X_i = 96$ ， $\sum_{i=1}^{12} X_i^2 = 1502$ ， $\sum_{i=1}^{12} Y_i = 228$ ， $\sum_{i=1}^{12} Y_i^2 = 4612$ ， $\sum_{i=1}^{12} X_i Y_i = 2000$ ，迴歸模型為 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ 時，

(一) 試求最小平方迴歸直線？(6分)

(二) 建立ANOVA表？(6分)

(三) 在0.05的顯著水準下，檢定迴歸線是否通過原點？(6分)

(四) 在0.05的顯著水準下，檢定迴歸線是否與X軸平行？(7分)

答：

$$(一) SS_X = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{12} = 734, SS_Y = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{12} = 280,$$

$$SS_{XY} = \sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{12} = 176$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = \frac{176}{734} = 0.2398, \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 17.0816,$$

$$\therefore \hat{y} = 17.0816 + 0.2398x$$

$$(二) SST = SS_Y = 280, SSR = \hat{\beta}_1^2 SS_X = 42.21$$

ANOVA TABLE				
source	SS	d.f.	MS	F
Reg	42.21	1	42.21	$F^* = 1.775$
Error	237.79	10	23.779	
Total	280	11		

$$(三) H_0: \beta_0 = 0 \text{ vs } H_1: \beta_0 \neq 0$$

$$\text{T.S.: } T = \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{\sqrt{\left(\frac{1}{12} + \frac{\bar{x}^2}{SS_X}\right)MSE}} \sim t_{(10)}$$

$$\text{R.R.: Reject } H_0 \text{ at } \alpha = 0.05 \text{ if } |T^*| > t_{(10)0.025} = 2.228$$

$$\because |T^*| = 7.6643 \quad \therefore \text{reject } H_0$$

我們有足夠證據去推論迴歸線不是通過原點的。

$$(四) H_0: \beta_1 = 0 \text{ vs } H_1: \beta_1 \neq 0$$

$$\text{T.S.: } F = \frac{MSR}{MSE} \sim F_{(1,10)}$$

$$\text{R.R.: Reject } H_0 \text{ at } \alpha = 0.05 \text{ if } F^* > F_{(1,10)0.05} = 4.965$$

$$\because F^* = 1.775 \quad \therefore \text{don't reject } H_0$$

我們沒有足夠證據去推論迴歸線與X軸不是平行的。