《統計學》

試題評析
本年度試題皆為基本觀念題，一般考生應該可以拿到80分以上。

一、請敘述或定義下列統計名詞或定理：（每小題10分，共20分）
（一）中央極限定理（The Central Limit Theorem）
（二）顯著水準（Significant Level）

答：

(一)設 $X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} f(x)$ 存在 μ，σ^2

令 $\overline{X}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

則 $\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$

(二)顯著水準 α = max P (type I error)

= max P (reject H_0 | H_0 is true)

【參考書目】秦大成老師「統計學」上課講義：第三回第81頁，第五回第5頁。

二、啟生醫院急診室陳主任想瞭解今年前半年該院急診病患之住院天數情形，陳主任自該院今年前半年急診病患名單中以系統抽樣隨機抽出15位病患為樣本，經查他們在啟生醫院之住院天數如下：37, 4, 20, 7, 15, 3, 6, 12, 2, 4, 5, 1, 10, 2, 7（註：$\sum x_i = 135$ 和 $\sum x_i^2 = 2{,}447$）。試根據上述樣本資料，求：（每小題6分，共24分）
（一）平均數（$\overline{x}$）
（二）變異數（s^2）
（三）中位數（me）
（四）請繪出盒形圖（boxplot），又此一樣本資料是否有潛在離群值（outlier）存在？若有，請指出並寫出你（妳）的依據。

答：

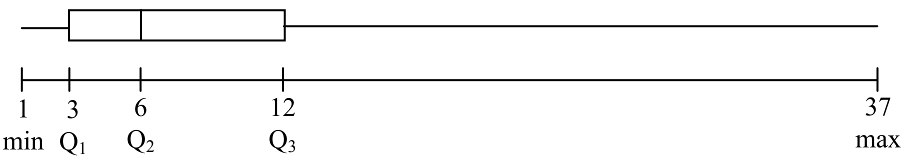
(一) $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{135}{15} = 9$

(二) $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}{n-1} = \dfrac{2447 - 15\times 9^2}{15-1} = 88$

(三)排序：1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 10, 12, 15, 20, 37

$m_e = X_{(8)} = 6$

(四) (1)盒形圖



(2)離群值: $X > Q_3 + 3 = 12 + 3 = 15$

$X < Q_1 - 3 = 3 - 3 = 0$

∴ 根據盒形圖：20, 37為離群值。

【參考書目】秦大成老師「統計學」上課講義：第一回，第39頁“盒形圖與離群值”，第40頁，例題1。

三、河川管理局在建設河川防洪堤防時均會考慮河川的年最大洪水位。河川管理局在建設淡水河堤防時，假設在任何一年中最大洪水位超過某一規定的堤防設計水位高度h的機率為0.1，試問：

(一)在未來3年中淡水河有一年最大洪水位超過h水位高度的機率有多大？(10分)

(二)在未來5年中淡水河至多有一年最大洪水位超過h水位高度的機率有多大？(10分)

答：

令 p 一年中最大洪水位超過h的機率

X: 未來n年中，洪水位超過h的年數

則$X \sim Bin(n, p=0.1)$

(一) $X \sim Bin(n=3, p=0.1)$

$P(X=1) = C_1^3 (0.1)^1 (1-0.1)^{3-1} = 0.243$

(二) $X \sim Bin(n=5, p=0.1)$

$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = C_0^5 (0.1)^0 (1-0.1)^{5-0} + C_1^5 (0.1)^1 (1-0.1)^{5-1} = 0.91854$

【參考書目】秦大成老師「統計學」上課講義：第三回，第7頁，例題4。

四、紅海公司對98年進入該公司的新進員工進行調查，以瞭解員工就職前失業期間的長短，人事經理隨機自98年進入該公司的新進員工中抽訪100人，其中具研究所學歷者36人，具大學學歷者64人，且調查顯示具研究所學歷者就職前平均失業期間為5.2個月，標準差為2.4個月；具大學學歷者就職前平均失業期間為7.8個月，標準差為3.6個月。試問：

(一)該公司98年兩種學歷(研究所及大學)的新進員工，就職前之平均失業期間差異的95%信賴區間為何？(12分)

(二)是否可由(一)的結果，在顯著水準$\alpha = 0.05$下做出該公司98年兩種學歷(研究所及大學)的新進員工，就職前之平均失業期間有顯著差異的結論嗎？請說明你(妳)的依據。(12分)

答：

研究所: $n_1 = 36$，$\overline{X}_1 = 5.2$，$S_1 = 2.4$，母體平均μ_1

大學 : $n_2 = 64$，$\overline{X}_2 = 7.8$，$S_2 = 3.6$，母體平均μ_2

$n_1 = 36 \ge 30$，且 $n_2 = 64 \ge 30$，採C.L.T. 查Z表

(一) $\mu_1 - \mu_2$ 之95%C.I.

$$=(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm Z_{\frac{0.05}{2}}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$=(5.2-7.8)\pm 1.96\cdot\sqrt{\frac{2.4^2}{36}+\frac{3.6^2}{64}}$$

$$=-2.6\pm 1.18=(-3.78,-1.42)$$

(二)

(1)根據(一)的結果，信賴區間不包含0

∴有充分證據顯示：兩種學歷新進員工，就職前之平均失業期間有顯著差異

(2)信賴區間$1-\alpha=0.95$ 之$\mu_1-\mu_2$ 兩尾信賴區間，對應顯著水準$\alpha=0.05$之兩尾假設檢定

H_0: $\mu_1-\mu_2=0$ v.s. H_1: $\mu_1-\mu_2\neq 0$

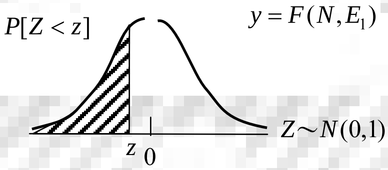
且 C.I. 包含0 $\Leftrightarrow$ Not reject H_0: $\mu_1-\mu_2=0$

C.I. 不包含0 $\Leftrightarrow$ Reject H_0: $\mu_1-\mu_2=0$

【參考書目】秦大成老師「統計學」上課講義。第四回，第90頁，例題6，第五回，第12頁。

五、設隨機變數 X 之分配為具有參數λ之波瓦松分配，即 $X\sim f(x)=\dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}$，$x>0$，$\lambda>0$。設 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 為自此法瓦松分配所抽出之隨機樣本，試求參數λ的最大概似估計式（MLE）。（12分）

【註】附統計表：標準常態分配機率分配表；r.v. Z～$N(0,1)$



Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.001	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.001	0.001
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.002	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.003	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.004	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.006	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.008	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064

−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.011
−2.1	0.0179	0.0174	0.017	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.015	0.0146	0.0143
−2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.025	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0369	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.063	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0984	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0828
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.102	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.123	0.121	0.119	0.117
−1	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.148	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.166	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.209	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.242	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.305	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.281	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.33	0.3254	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.352	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.409	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4285	0.4247
0	0.5	0.496	0.492	0.488	0.484	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

答：

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

$$\ln L(\lambda)=-n\lambda+n\bar{x}\ln\lambda-\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i!)$$

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-n+\frac{n\bar{x}}{\lambda}=0$$

$\Rightarrow\ \lambda=\bar{x}$

$\because\ \left.\frac{d^2\ln L(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\bar{x}}<0$

當 $\lambda=\bar{x}\ \Rightarrow\ L(\lambda)$ 達max

∴ $\hat{\lambda} = \overline{X}$ 爲 λ 之MLE

【參考書目】秦大成老師「統計學」上課講義。第四回，第10頁，例題4。